

Cours 11

(suite de "Exemples de modules")

- $A = K[T_1, \dots, T_n]$

On a une équivalence :

$$\{K[T_1, \dots, T_n]\text{-modules}\} \xleftrightarrow{\cong} \left\{ (V, f_1, \dots, f_n) \mid \begin{array}{l} V: K\text{-e.v.} \\ f_i \in \text{End}_K(V) \\ f_1, \dots, f_n \text{ commutent} \\ \text{entre eux} \end{array} \right\}$$

$\Rightarrow$ $V: K[T_1, \dots, T_n]\text{-module}$

on définit $f_i: V \rightarrow V$ K -linéaire
 $x \mapsto T_i \cdot x$

$\Leftarrow$ $(V, f_1, \dots, f_n)$ donnée,

on définit $K[T_1, \dots, T_n] \times V \rightarrow V$
 $(T_i, x) \mapsto T_i \cdot x = f_i(x)$

Exo: Vérifier bien-définies • inverses • compatibles avec morph.
 (utilise commutativité)

- $A = K\langle T_1, \dots, T_n \rangle$: polynôme non commutatifs

(A est un anneau non commutatif)
 si $n \geq 2$

on a une équivalence :

$$\{K\langle T_1, \dots, T_n \rangle\text{-modules}\} \xleftrightarrow{\cong} \left\{ (V, f_1, \dots, f_n) \mid \begin{array}{l} V: K\text{-e.v.} \\ f_i \in \text{End}_K(V) \end{array} \right\}$$

(même construction, mais lorsqu'on vérifie "bien définie")
on n'a pas besoin de commutativité)

- $A :=$ l'algèbre de Weyl.
 $= \mathbb{K}[x, \partial_x]$
 $= \mathbb{K}\langle x, \partial_x \rangle / \langle \partial_x \cdot x - x \cdot \partial_x - 1 \rangle$

A est l'algèbre des opérateurs différentiels
à une variable

$$\{ \mathbb{K}[x, \partial_x]\text{-modules} \} \longleftrightarrow \{ \mathbb{K}\text{-e.v. muni d'une action d'opérateur diff.} \}$$

$\parallel$
 D -modules.

Plus généralement,

$$A := \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n, \partial_1, \dots, \partial_n]$$

$$:= \frac{\mathbb{K} \langle x_1, \dots, x_n, \partial_1, \dots, \partial_n \rangle}{\langle x_i x_j - x_j x_i, \partial_i \partial_j - \partial_j \partial_i, \partial_i x_j - x_j \partial_i - \delta_{ij} \rangle}$$

"Algèbre de Weyl à n variables".

$$\{A\text{-modules}\} \longleftrightarrow \{D\text{-Modules sur } A^n\}$$

- G groupe (fini), $\mathbb{K}$ = corps

Rappel: $\mathbb{K}[G] := \left(\mathbb{K}\text{-e.v. ayant base } \{\delta_g\}_{g \in G}, \cdot \right)$

où $\cdot$ est $\delta_g \cdot \delta_{g'} := \delta_{gg'}$.

($\mathbb{K}[G]$ est une $\mathbb{K}$ -algèbre non-commutatif si G n'est pas abélien)

Def. Une $\mathbb{K}$ -représentation de G est un $\mathbb{K}[G]$ -module

- Un morphisme entre deux représentations de G est un morphisme de $\mathbb{K}[G]$ -modules.

Concrètement : Une représentation de G est un $\mathbb{K}$ -e.v. V muni d'une action de gp G :

$$\begin{aligned} G \times V &\longrightarrow V \\ (g, x) &\longmapsto g.x := \rho_g.x \end{aligned}$$

†q (i) $g.(x+y) = g.x + g.y$

$g.(\lambda x) = \lambda g.x \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}$

c-à-d : g induit un endom. $\mathbb{K}$ -lin. de V

action de G ensemblist

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{(ii)} & \text{Associativité : } \forall g, g' \in G, \forall x \in V \\ & g.(g'.x) = (gg').x \\ \text{(iii)} & \text{Unité : } e_G.x = x \quad \forall x \in V. \end{array} \right.$$

Autrement-dit :

une représentation de G est un $\mathbb{K}$ -e.v. V muni d'un morphisme de $\mathbb{K}$ -algèbres :

$$f : \mathbb{K}[G] \longrightarrow \text{End}_{\mathbb{K}}(V)$$

Lemme Soit B une K -algèbre

$$\text{Hom}_{K\text{-Alg}}(K[G], B) \xrightarrow[\text{restriction}]{\sim} \text{Hom}_{\text{groupe}}(G, B^\times)$$

$$f \longmapsto \left(\begin{array}{l} f = f|_G : G \longrightarrow B^\times \\ g \longmapsto f(\delta_g) \end{array} \right)$$

$$\text{où } B^\times = \{ b \in B \mid b \text{ est inversible} \}$$

Preuve : $f = f|_G$ est bien-définie :

$$\delta_g \in K[G]^\times \Rightarrow f(\delta_g) \in B^\times.$$

• $f = f|_G$ est un morphisme de gp.

$$f(gg') := f(\delta_{gg'}) = f(\delta_g \cdot \delta_{g'}) = f(\delta_g) \cdot f(\delta_{g'}) = f(g)f(g')$$

• Injectivité : facile car $\{\delta_g\}_{g \in G}$ engendrent $K[G]$. comme K -e.v.

• Surjectivité :

Soit $f : G \longrightarrow B^\times$ un morphisme de gp.

on définit

$$f: \mathbb{K}[G] \longrightarrow B \quad \text{par}$$

$$\sum_{i=1}^r \lambda_i \delta_{g_i} \longmapsto \sum_{i=1}^r \lambda_i f(g_i)$$

comme $\{\delta_g\}_{g \in G}$ forme une $\mathbb{K}$ -base de $\mathbb{K}[G]$

f est un morphisme de $\mathbb{K}$ -e.v.

Il reste à vérifier que f préserve le produit :

Exo: vérifier le.

Essentiellement, c'est l'identité :

$$f(\delta_g \cdot \delta_{g'}) = f(\delta_{gg'}) = f(gg') = f(g)f(g') = f(\delta_g) \cdot f(\delta_{g'})$$

On spécialise le lemme au cas $B = \text{End}_{\mathbb{K}}(V)$

Cor $G : \text{gp}$, $\mathbb{K} = \text{cyps}$, $V : \mathbb{K}\text{-e.v.}$ alors

$$\text{Hom}_{\mathbb{K}\text{-alg}}(\mathbb{K}[G], \text{End}_{\mathbb{K}}(V)) \xrightarrow[\text{restrict.}]{\sim} \text{Hom}_{\text{Grp}}(G, \text{GL}_{\mathbb{K}}(V))$$

$\parallel$

$\{ \mathbb{K}\text{-Représentations de } G \text{ sur } V \}$

Conclusion :

Une $\mathbb{K}$ -représentation de G est un $\mathbb{K}$ -e.v. V
muni d'un morphisme de gp

$$G \xrightarrow{\rho} GL_{\mathbb{K}}(V)$$

Résumé : 4 définitions équivalentes
de $\mathbb{K}$ -représentation de groupe G

Déf 1 : $\mathbb{K}[G]$ -module.

Déf 2 : un $\mathbb{K}$ -e.v. V , muni d'une action de G
 $\forall g, \quad g \in V$ par app. $\mathbb{K}$ -lin.

Déf 3 : Un $\mathbb{K}$ -e.v. V muni d'un morphisme
de $\mathbb{K}$ -alg.

$$f: \mathbb{K}[G] \rightarrow \text{End}_{\mathbb{K}}(V).$$

Déf 4 : Un $\mathbb{K}$ -e.v. V muni d'un morphisme
de gp.

$$\rho: G \longrightarrow GL_{\mathbb{K}}(V)$$

(Exo : Vérifier les équivalences)

• Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie sur un corps $\mathbb{K}$

$$\left(\begin{array}{l} \text{c-à-d : } \mathfrak{g} \text{ est un } \mathbb{K}\text{-e.v. muni d'une app. bilin.} \\ [-,-] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g} \\ (x, y) \longmapsto [x, y] \\ \text{tq} \quad \bullet [x, y] = -[y, x] \\ \bullet \text{Jacobi : } [x, [y, z]] = [[x, y], z] + [y, [x, z]] \end{array} \right)$$

Exemple : $(M_n(\mathbb{K}), [-, -])$

$A := U(\mathfrak{g})$: l'algèbre enveloppante de $\mathfrak{g}$.

(analogie : $\mathfrak{g} \mapsto \mathbb{K}[\mathfrak{g}] \quad \mathbb{K}\text{-alg.}$)

Déf : Une $\mathbb{K}$ -représentation d'alg. de Lie $\mathfrak{g}$ est $U(\mathfrak{g})$ -module

Concrètement :

c'est un morphisme d'alg. de Lie

$$\mathcal{Q} \longrightarrow (\text{End}_{\mathbb{K}}(V), [-, -])$$

ou de manière équivalente:

c'est une action

$$\mathcal{Q} \times V \longrightarrow V$$

- tg
- $\forall x \in \mathcal{Q}$, x agit sur V par app. $\mathbb{K}$ -lin.
 - $x.(y.(v)) - y.(x.(v)) = [x, y].v$.

- Un quiver ^(quiver) est un graphe orienté.



$$Q = (S, E)$$

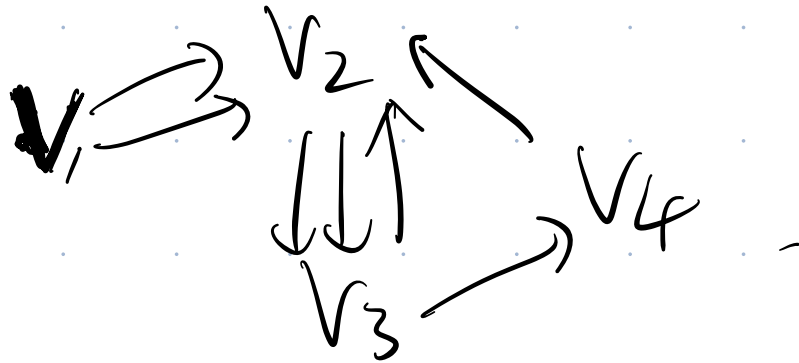
$$t: E \rightarrow S$$

$$h: E \rightarrow S$$

$$A := \mathbb{K}[Q] = \left(\begin{array}{l} \text{l'algèbre des chemins,} \\ \bullet = \text{concaténation} \end{array} \right)$$

Déf Une représentation de carquois Q
est un $K[Q]$ -module

Concrètement, c'est la donnée d'un
 K -e.v. pour chaque sommet.
et une app. K -lin. pour chaque
arête.



(Exemples)



(Exemples)

Variantes de modules

Def Soit A un anneau.

Un A -module à droite

est un A^{op} -module à gauche.

où $A^{\text{op}} = (A, +, \circ_p)$ où $a \circ_p b = b \cdot a$

Rf: A -module à gauche

est un A^{op} -module à droite.

Notation On note Mod_A la "catégorie"
des A -modules à droite.

Def un morphisme de A -modules à droite
est un morphisme de A^{op} -modules correspondants.

Définition concrète équivalente

Un A -module à droite est un gp abélien M muni d'une action

$$\begin{aligned} M \times A &\longrightarrow M \\ (x, a) &\longmapsto x.a \end{aligned}$$

tg (i) $(x+x').a = x.a + x'.a$

(ii) $x.(a+a') = x.a + x.a'$

(iii) $x.(a.a') = (x.a).a'$

(iv) Si A unitaire, $x.1 = x \quad \forall x$.

Un morphisme $M \xrightarrow{f} M'$ de A -mod à droite est un morphisme de gp abélien tg

$$f(x.a) = f(x).a \quad \forall x \in M, \forall a \in A.$$

Exemples Soit K un corps
Soit G un groupe, soit X un ensemble

• Si on a une action de G sur X à gauche

alors $V := \text{Vect}_K(e_x; x \in X)$

est muni d'une structure naturelle de $[K[G]]$ -mod.

i.e. une K -représentation de G .

$K[G] \times V \longrightarrow V$ est définie par

$$(g, e_x) \mapsto g \cdot e_x := e_{gx}$$

- si on a une action de G sur X à droite
(i.e. c'est une action à gauche de G^{op} sur X)

$\Rightarrow$ on a un $K[G^{\text{op}}]$ -module à gauche V

or $K[G^{\text{op}}] = K[G]^{\text{op}}$

$$(\text{car } \delta_g \circ \delta_{g'} := \delta_{g'} \cdot \delta_g = \delta_{g'g} = \delta_{g \cdot g'})$$

$\Rightarrow$ on a un $K[G]$ -module à droite V .

Exemples. soit X un ensemble (esp. top. ...)

$F :=$ les fonctions sur X à valeurs $\mathbb{R}$
(continue...)

Soit G un gp qui agit sur X (à gauche)

alors G agit sur F à droite par

$$(f \cdot g)(x) := f(g \cdot x).$$

$\leadsto F$ est un $K[G]$ -module à droite.

Bimodules

Def Soient A, B deux anneaux unitaires

un (A, B) -bimodule, on note $A \text{ Mod } B$

est un groupe abélien M muni d'une action

$$A \times M \times B \longrightarrow M$$

$$(a, m, b) \longmapsto a \cdot m \cdot b$$

Vérifiant : Notation : $a \cdot m := a \cdot m \cdot 1_B$; $m \cdot b := 1_A \cdot m \cdot b$

$$(i) \quad a(m + m')b = a \cdot m \cdot b + a \cdot m' \cdot b$$

$$(ii) \quad (a + a') \cdot m \cdot b = a \cdot m \cdot b + a' \cdot m \cdot b ; \quad a \cdot m(b + b') = a \cdot m \cdot b + a \cdot m \cdot b'$$

$$(iii) \quad \underline{\text{Associativité}} : - (a \cdot m) \cdot b = a \cdot (m \cdot b) =: a \cdot m \cdot b$$

$$- (a \cdot a') \cdot m \cdot b = a \cdot (a' \cdot m \cdot b)$$

$$- a \cdot m(b \cdot b') = (a \cdot m \cdot b) \cdot b'$$

$$(iv) \quad \underline{\text{Unités}} : 1_A \cdot m = m ; \quad m \cdot 1_B = m.$$

Définition équivalente

A, B comme avant

M : un gp abélien muni

- d'une structure de A -module à gauche
- d'une structure de B -module à droite.

$$\text{tg} \quad (a m) b = a (m b) \quad \forall a \in A, b \in B, m \in M$$
$$\quad \quad \quad \parallel$$
$$\quad \quad \quad a m b$$

Exemple $A =$ anneau

alors A est naturellement un (A, A) -bimodule

Déf Un morphisme entre deux (A, B) -bimodules M et M' est un morphisme de gp

$$f: M \rightarrow M' \quad \text{tg}$$

$$f(a m) = a f(m) \quad \text{et} \quad f(m b) = f(m) b$$

$$\forall a \in A, b \in B, m \in M.$$

Exemples (Action sur $\text{Hom}(-, -)$)

- Soit M un A -module $\mathbb{Z}$ gauche
 N un groupe abélien

Alors $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, N)$ est un A -module à droite.

défini par:

$$(f \cdot a)(m) = f(a \cdot m)$$

||

$${}_A M \rightsquigarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, N)_A$$

- ${}_A M_B \in {}_A \text{Mod}_B$

$N = \text{gp abélien}$

$${}_B \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, N)_A \in {}_B \text{Mod}_A$$

- Soit M un gp ab.
 $N \in {}_C \text{Mod}_D$

Alors $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, N) \in {}_C \text{Mod}_D$.

• Si ${}_A M \in A \text{Mod}$

${}_C N \in {}_C \text{Mod}$

Alors ${}_C \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, N)_A \in {}_C \text{Mod}_A$

l'action est définie par

$$(c.f.a)(m) = c f(a.m) ..$$

Exo: vérifier que c'est une str
de (C, A) -bimodule.

Somme directe

Déf A : anneau

$$M, N \in A\text{Mod}$$

$M \oplus N$ est le A -module à gauche suivant :

— comme groupe abélien est $M \oplus N$.

— $A \times (M \oplus N) \longrightarrow M \oplus N$

$$(a, (m, n)) \longmapsto (am, an) .$$

Exemples : $\oplus$ pour $\mathbb{Z}$ -modules

$\oplus$ pour $\mathbb{K}$ -modules

Inversement = Une décomposition en somme directe

d'un $L \in A\text{Mod}$ est la donnée de deux

sous- A -modules M et N de L

$$\text{tq } \left\{ \begin{array}{l} M \cap N = \{0\} \end{array} \right.$$

$\left. \begin{array}{l} \end{array} \right\} L \text{ est engendrée par } M \text{ et } N .$

On note $L = M \oplus N$.

Lemme: On a une bijection, $L \in \mathcal{A}\text{Mod}$
 $\left\{ \begin{array}{l} \text{Décomposition en somme directe} \\ \text{de } L \end{array} \right\} \longleftrightarrow \left\{ p \in \text{End}_{\mathcal{A}}(L) \mid p^2 = p \right\}$

$$(L = M \oplus N) \longmapsto \left(\begin{array}{l} p: L \rightarrow L \\ (m, n) \mapsto m \end{array} \right)$$

$$L = \text{Im}(p) \oplus \text{Im}(\text{id} - p) \longleftarrow p$$

Preuve. (comme en algèbre linéaire, Exo)